§6. Метод подстановки.

Пусть $\int f(x)dx$ не является табличным. Следует упростить подынтегральное выражение, введя новую переменную так, чтобы интеграл стал табличным.

$$\boxed{\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{array}}, \text{ т.е.}$$

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=\int f(\varphi(t))\cdot d(\varphi(t))=F(\varphi(t))+C$$

После нахождения интеграла необходимо вернуться к первоначальной переменной **x**.

Пример.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}=\int\frac{2tdt}{t+1}=2\int\frac{t+1-1}{t+1}dt=2\int\left(\frac{t+1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=t \\ x+1=t^2 \\ dx=2tdt \end{array}\right|=2t-2\int\frac{d(t+1)}{t+1}=2t-2\ln|t+1|+C=2\sqrt{x+1}-2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right|+C$$

§7.Интегрирование по частям.

Нет формулы, позволяющей находить интеграл от произведения функций (производная произведения есть). Метод интегрирования по частям основан на формуле дифференциала произведения функций:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$
$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства:

$$\int d(u \cdot v) = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$
$$uv = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$

$\boxed{\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du}$ - формула интегрирования по частям

Сущность метода: подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляют в виде произведения 2-х множителей **u** и **dv**. Причем **dv** должно содержать **dx**. Затем находят **v** и **du**. Первое находят как интеграл от **dv**, а **du**, как дифференциал от **u**. После этого пользуются правой частью формулы.

Практика показала, что по частям берутся следующие интегралы:

Тип	**Вид интеграла**	**u**	**dv**
I	$\int p(x)\cdot \ln x dx$ $\int p(x)\cdot \arcsin x dx$ $\int p(x)\cdot \mathrm{arctg} x dx$	$\ln x$ $\arcsin x$ $\mathrm{arctg} x$	$p(x)dx$ $p(x)dx$ $p(x)dx$
II	$\int p(x)\cdot \sin ax\cdot dx$ $\int p(x)\cdot \cos bx\cdot dx$ $\int p(x)\cdot e^{\alpha x}dx$	$p(x)$ $p(x)$ $p(x)$	$\sin ax\cdot dx$ $\cos bx\cdot dx$ $e^{\alpha x}dx$
III	$\int e^{\alpha x}\cdot \sin ax\cdot dx$ $\int e^{\alpha x}\cdot \cos bx\cdot dx$ $\int \sin(\ln x)dx$	$e^{\alpha x}$ $\sin ax$ $e^{\alpha x}$ $\cos bx$ $\sin(\ln x)$	$\sin ax dx$ $e^{\alpha x}dx$ $\cos bx dx$ $e^{\alpha x}dx$ dx

$P(x)$ - многочлен или одночлен.

Замечания:

1. **Под знаком интегралов 1-го типа стоят функции:** $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg} x$, $\ln x$, **от которых интеграл не существует.**
2. **Интегралы 2-го типа берутся n-кратным интегрированием, если** $P(x)$ **- многочлен n-й степени.**

3. Интегралы 3-го типа берутся по частям дважды, в результате чего получается исходный интеграл. Интегрирование прекращается, и из полученного выражения находят искомый интеграл, выражая его через все остальные члены.

Пример.

1)

$$\int \ln x dx = \begin{vmatrix} \ln x = u & \frac{dx}{x} = du \\ dx = dv & x = v \end{vmatrix} = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - \int dx =$$

$$= \underline{x \cdot \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C}$$

2)

$$\int x^2 \cdot \cos x dx = \begin{vmatrix} x^2 = u & \cos x dx = dv \\ 2x dx = du & \sin x = v \end{vmatrix} = x^2 \cdot \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx = x^2 \cdot \sin x - 2\int x \cdot \sin x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} x = u & \sin x dx = dv \\ dx = du & v = -\cos x \end{vmatrix} = x^2 \cdot \sin x - 2\left(-x \cdot \cos x - \int (-\cos x) dx\right) = \underline{x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2\sin x + C}$$

3)

$$\int e^x \cdot \sin x dx = \begin{vmatrix} e^x = u & \sin x dx = dv \\ e^x dx = du & -\cos x = v \end{vmatrix} = -e^x \cos x - \int (-\cos x) \cdot e^x dx =$$

$$= -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x dx = \begin{vmatrix} e^x = u & \cos x dx = dv \\ e^x dx = du & \sin x = v \end{vmatrix} = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x dx;$$

$$2\int e^x \cdot \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \cdot \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

§8. Рациональные функции. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби.

Определение 1. ***Рациональной функцией*** называется функция, равная отношению двух многочленов. Рациональные функции иначе называются ***рациональными дробями***.

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Пример. $R_1(x)=\dfrac{x^2+3x+7}{x^4+9x^3+8}$ $\quad R_2(x)=\dfrac{x^2+9}{x-1}$ $\quad R_3(x)=\dfrac{3x^2+5x+8}{x^2+2x-3}$

Определение 2. Рациональная дробь называется ***правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя.

$R_1(x)$ - правильная рациональная дробь.

Определение 3. Рациональная дробь называется ***неправильной,*** если степень числителя больше или равна степени знаменателя.

$R_2(x)$, $R_3(x)$ - неправильные рациональные дроби.

Если дробь правильная, то можно начинать интегрирование.

Если дробь неправильная, то ее представляют в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, а правильную рациональную дробь, в свою очередь, представляют в виде суммы простейших (элементарных) дробей.

Теорема. Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, используя алгоритм Евклида деления многочлена на многочлен.

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}}$$

Пример.

$$\frac{x^3+3x^2+x-1}{x-1} = x^2+4x+5+\frac{4}{x-1}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2+x-1 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-x^2} & x^2+4x+5 \\ -\ 4x^2+x-1 & \\ \underline{4x^2-4x} & \\ -\ 5x-1 & \\ \underline{5x-5} & \\ 4 & \end{array}$$

4 – неделимый остаток

Всякую правильную дробь можно единственным образом разложить на простейшие (элементарные) дроби. Существует 3 типа элементарных дробей:

1. $\dfrac{A}{x-a}$ - I тип

2. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ - II тип

3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ - III тип

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие.

1) **Если знаменатель содержит различные линейные множители, т.е.**

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$$

$A-?$
$B-?$
$C-?$

2) **Если знаменатель содержит повторяющиеся линейные множители, т.е.**

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)^2(x-c)^3}=$$

$$=\frac{A}{x-a}+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\frac{C_1}{x-c}+\frac{C_2}{(x-c)^2}+\frac{C_3}{(x-c)^3};$$

$A-?\quad B_1-?\quad B_2-?$

$C_1-?\quad C_2-?\quad C_3-?$

3) **Если знаменатель правильной рациональной дроби содержит неразложимые квадратные трехчлены (с отрицательным дискриминантом), т.е.**

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)\left(x^2+p_2x+q_2\right)}=$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{Cx+Д}{x^2+p_2x+q_2}$$

§9.Интегрирование простейших дробей.

Интеграл от простейшей дроби:

1) **I типа:**

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{1}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C$$

2) **II типа**

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C$$

3) **III типа (Д < 0)**

В знаменателе выделим полный квадрат:

$$x^2+px+q=\left(x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2$$

Подставим полученное выражение в интеграл 3го типа:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=A\int\frac{x}{x^2+px+q}dx+B\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{2}A\int\frac{(2x+p)-p}{x^2+px+q}dx+$$

$$+B\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}=\frac{1}{2}A\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(B-\frac{p}{2}A\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}A\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{p}{2}A\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

<u>§10. Метод неопределенных коэффициентов.</u>

(для нахождения значений A, B, C…..)

Это один из наиболее распространенных методов определения коэффициентов A, B, C…. в разложении правильной рациональной дроби на простейшие.

Сущность метода **состоит в сравнении коэффициентов при одинаковых степенях переменной х числителей дробей.**

Для определения числителя правой части простейшие дроби приводят к общему знаменателю и числитель полученной новой дроби приравнивают к числителю подынтегральной дроби. Получится система «n» уравнений с «n» неизвестными А, В, С…, которая имеет единственное решение, так как разложение правильной рациональной дроби на простейшие всегда возможно и единственно.

Пример. $$\int \frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}dx=$$

Выпишем подынтегральную функцию и представим ее в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2\left(x^2+2x+2\right)}=\overset{\frac{(x-1)\left(x^2+2x+2\right)}{}}{\frac{A}{x-1}}+\overset{\frac{\left(x^2+2x+2\right)}{}}{\frac{B}{(x-1)^2}}+\overset{\frac{(x-1)^2}{}}{\frac{Cx+Д}{x^2+2x+2}}$$

$$x^2-5x+9=A\left(x^3-x^2+2x^2-\cancel{2x}+\cancel{2x}-2\right)+B\left(x^2+2x+2\right)+$$

$$+\left(Cx+\text{Д}\right)\left(x^2-2x+1\right)=\underline{Ax^3}+\underleftrightarrow{Ax^2}-2A+\underleftrightarrow{Bx^2}+\underline{\underline{2Bx}}+2B+\underline{Cx^3}-$$

$$\underleftrightarrow{2Cx^2}+\underline{\underline{Cx}}+\underleftrightarrow{\text{Д}x^2}-\underline{\underline{2\text{Д}x}}+\text{Д}=x^3\left(A+C\right)+x^2\left(A+B-2C+\text{Д}\right)+$$

$$x\left(2B+C-2\text{Д}\right)+\left(-2A+2B+\text{Д}\right)$$

$$\begin{array}{c|l} x^3 & \left\{\begin{array}{l} 0=A+C \\ 1=A+B-2C+\text{Д} \\ -5=2B+C-2\text{Д} \\ 9=-2A+2B+\text{Д} \end{array}\right. \\ x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A=-C \\ -C+B-2C+\text{Д}=1 \\ 2B+C-2\text{Д}=-5 \\ 2C+2B+\text{Д}=9 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} A=-C \\ B-3C+\text{Д}=1 \qquad (-2) \\ 2B+C-2\text{Д}=-5 \\ 2B+2C+\text{Д}=9 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} B-3C+\text{Д}=1 \\ 7C-4\text{Д}=-7 \\ 8C-\text{Д}=7 \end{array}\right|(-4) \qquad \left\{\begin{array}{l} B-3C+\text{Д}=1 \\ 8C-\text{Д}=7 \\ 25C=35 \end{array}\right.$$

$$A=-\frac{7}{5}$$

$$B=1$$

$$\text{Д}=\frac{21}{5}$$

$$C=\frac{7}{5}$$

Возвращаемся к исходному интегралу:

$$\int \frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx = \int \frac{-\frac{7}{5}}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{\frac{7}{5}x+\frac{21}{5}}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= -\frac{7}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{7}{5}\int \frac{xdx}{(x^2+2x+2)} + \frac{21}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$

$$= -\frac{7}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}\int \frac{(2x+2)-2}{x^2+2x+2}dx + \frac{21}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$

$$= -\frac{7}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{7}{10}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx - \frac{7}{5}\int \frac{dx}{(x+2x+1)-1+2} + \frac{21}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \underline{-\frac{7}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{7}{10}\ln\left|x^2+2x+2\right| + \frac{14}{5}\operatorname{arctg}(x-1) + C}$$

Замечания: 1) Если знаменатель правильной рациональной дроби разлагается только на линейные множители вида $(x-a)(x-b)(x-c)$, то можно применять **метод частных значений** для нахождения коэффициентов A, B, C…, придавая **x** значения $x=a;\ x=b;\ x=c$

Пример. $$\frac{2x^2+10x-18}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3}$$

$$2x^2+10x-18 = A(x+2)(x-3) + B(x-1)(x-3) +$$
$$+C(x-1)(x+2)$$

$$\begin{array}{l|lll}
x=1 & -6=A\cdot 3(-2) & & A=1 \\
x=-2 & -30=B(-3)(-5) & & B=-2 \\
x=3 & 30=C\cdot 2\cdot 5 & & C=3
\end{array}$$

2) **Во многих примерах удобно применять комбинированный метод: вместе использовать метод частных значений и метод неопределенных коэффициентов.**

Выводы: Если под знаком интеграла стоит рациональная дробь, то:

1. **Если подынтегральное выражение - неправильная рациональная дробь, то ее надо представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.**
2. **Правильную рациональную дробь разложить на сумму простейших дробей, для чего определить значения коэффициентов A, B, C…**
3. **Подынтегральное выражение представить в виде суммы легко интегрируемых функций.**